11. Séries de Fourier

11.1 Definições e fatos úteis

Seja expressão formal:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{11.1}$$

Questões:

1) Como achar a_n e b_n?
2) Dada f, quando é possível escreve-la da forma (11.1)?
3) Qual é tipo da convergência da (11.1)?

Fatos úteis:

I. a) Seja f uma função par ($f(x) = f(-x)$), logo

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx.$$

b) Seja f uma função impar ($f(x) = -f(-x)$), logo

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0.$$

II. a) Portanto, como $\cos(nx)\cdot\operatorname{sen}(mx)$ é impar, temos

$$\int_{-L}^{L} \cos(nx)\cdot\operatorname{sen}(mx)dx = 0.$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} \cos(nx)\cdot\cos(mx)dx &= \left\{\cos(mx)\cdot\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos((m+n)x)+\cos((n-m)x)]\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m+n)x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)x)dx = \\
&= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((m+n)x)}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((m-n)x)}{n-m}\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m\neq n, \\ \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m=n, \end{cases} = \\
&= 0 + \begin{cases} 0, & m\neq n, \\ \frac{1}{2}(\pi+\pi)=\pi, & m=n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}(nx)\cdot\operatorname{sen}(mx)dx &= \left\{\operatorname{sen}(mx)\cdot\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}[\cos((m-n)x)-\cos((m+n)x)]\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((m-n)x)dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n+m)x)dx = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((m+n)x)}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}((m-n)x)}{n-m}\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m\neq n, \\ \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}, & m=n, \end{cases} = \\
&= 0 + \begin{cases} 0, & m\neq n, \\ \pi, & m=n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Resposta a Questão 1)

Achamos a_n e b_n supondo que podemos integrar termo a termo em (11.1).

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(mx)\right]dx = \\
&= \frac{a_0}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}b_n\operatorname{sen}(nx)dx = \\
&= \frac{a_0}{2}(\pi+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + 0 \\
&= a_0\pi.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Agora

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\cos(mx) + b_n\,\mathrm{sen}(mx)\cos(mx)\right]dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(nx)\cos(mx)dx =$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx + 0 \overset{II.b)}{=} a_m\cdot\pi.$$

Portanto

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx.$$

Semelhante

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(mx)dx.$$

Definição 11.1.1 Seja $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ uma função. A *série de Fourier* de f é definida por

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)],$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx$$

Obs 1) Se f é par, temos

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx).$$

De fato, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = 0$, pois neste caso $f(x)\,\mathrm{sen}(nx)$ é impar.

2) Se f é impar, temos

$$S[f] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}(nx).$$

De fato, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0$, pois neste caso $f(x)\cos(nx)$ é impar.

Obs Podemos introduzir a série de Fourier para a função f definida no intervalo arbitrário simétrico $[-L,L]$. Definimos $g(x) = f(\frac{Lx}{\pi})$, logo a função $g(x)$ está definida no intervalo $[-\pi,\pi]$. Portanto

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{Lx}{\pi})dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{Lx}{\pi}, \\ x = \frac{y\pi}{L}, \\ dx = \frac{\pi}{L}dy \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(y)\cdot\frac{\pi}{L}dy = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)dy.$$

Similarmente

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\frac{\pi ny}{L}dy$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\text{sen}(nx)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\,\text{sen}\,\frac{\pi ny}{L}dy.$$

assim,

$$S[g(x)] = S[f(y)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi ny}{L} + b_n\,\text{sen}\,\frac{\pi ny}{L}\right].$$

Última soma é dita a soma de Fourier da função f definida no intervalo $[-L,L]$.

11.2 Aplicação das séries de Fourier

Seja uma barra sólida (veja Figura 11.1) condutora de calor. Seja $u(x,t)$ temperatura da barra no ponto x no momento de tempo t. Então a equação do calor é

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{11.2}$$

onde $\alpha \equiv$ const é difusividade térmica.

Suponha que a solução da equação (11.2) satisfaz as condições

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L, \tag{11.3}$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{11.4}$$

Hipotese: Suponha que $u(x,t) = X(x)T(t)$, ou seja $u(x,t)$ admite separação das variáveis. Assim,

$$u_{xx} = X''(x)T(t), \quad u_t = T'(t)X(x).$$

Então, equação (11.2) implica que

$$\alpha^2 X''T = XT' \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}.$$

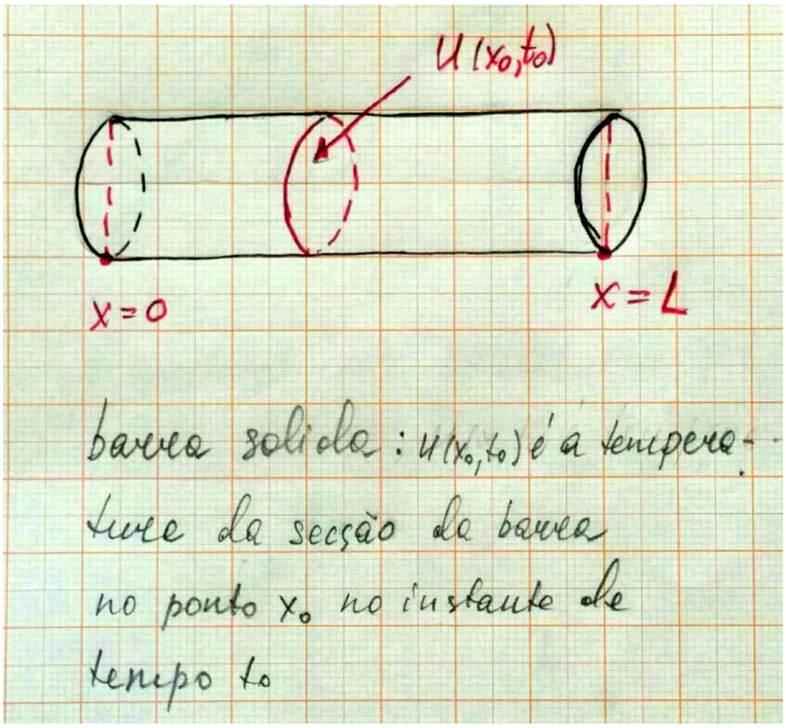

Figure 11.1: Interpretação física da equação de calor

O termo $\frac{X''}{X}$ depende apenas de x e o termo $\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}$ depende apenas de t. Assim eles são iguais a uma constante denotada por $-\lambda$. Portanto

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \alpha^2 \lambda T = 0 \end{cases}. \tag{11.5}$$

1) A equação $X'' + \lambda X = 0$ tem solução geral

$$X = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} x).$$

Então (11.4) implica que

$$\begin{cases} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(L) = c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} L) = 0 \end{cases}$$

Logo $\sqrt{\lambda} L = \pi \cdot n$. Como $n \geq 1$, obtemos

$$\lambda = \left(\frac{\pi \cdot n}{L}\right)^2$$

ou

$$X_n(x) = d_n \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{L},$$

onde d_n é uma constante.

2) O sistema (11.5) implica

$$T' + \left(\frac{\pi \cdot n \cdot \alpha}{L}\right)^2 T = 0,$$

ou seja

$$T_n = f_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n \alpha}{L}\right)^2},$$

onde f_n é uma constante. Portanto obtemos as soluções fundamentais

$$u_n(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi n \alpha}{L}\right)^2 t} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{L}.$$

Agora devemos satisfazer condição (11.3): $u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$

A solução geral da (11.2) tem forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n \alpha}{L}\right)^2 t} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{L}.$$

Pelo (11.3) temos que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{L} = f(x).$$

Portanto

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{L} dx.$$

Obs Seja $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, com

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t > 0.$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Assim,

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi \cdot n}{L}\right)^2 t} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{L},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx, \qquad c_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx.$$

Obs Seja equação de onda $a^2 u_{xx} = u_{tt}$ (veja Figura 11.2). Suponha que a solução satisfaz as condições

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = f(x),$$
$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

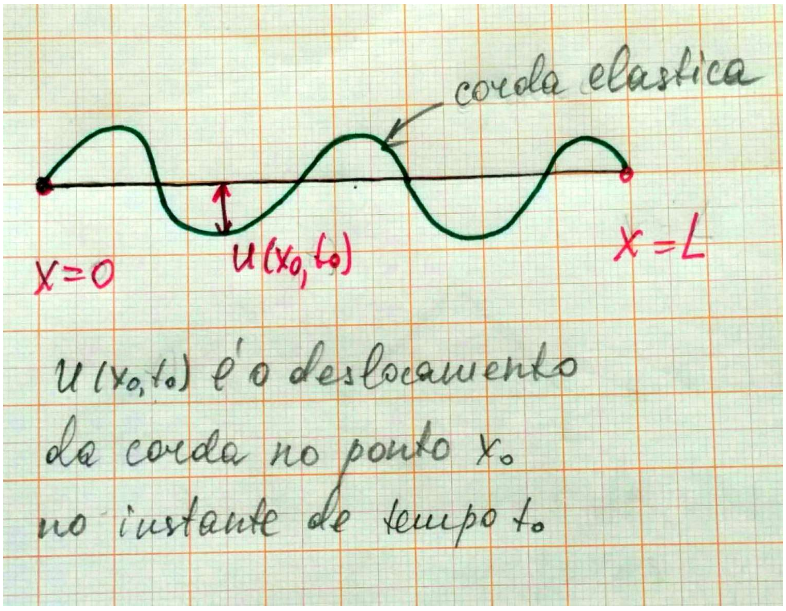

Figure 11.2: Interpretação física da equação de onda

Supondo $u(x,t) = X(x)T(t)$, obtemos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi n a t}{L},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{L} dx.$$